



ЭЙЛЕР ЛЕОНАРД (1707-1783)

Идеальный математик 18 века - так часто называют Эйлера. Это был недолгий век Просвещения, вклинившийся между эпохами жестокой нетерпимости. Всего за 6 лет до рождения Эйлера в Берлине была публично сожжена последняя ведьма. А через 6 лет после смерти Эйлера - в 1789 году - в Париже вспыхнула революция. Эйлеру повезло: он родился в маленькой тихой Швейцарии, куда из всей Европы приезжали мастера и ученые, не желавшие тратить дорогое рабочее время на гражданские смуты или религиозные распри. Так переселилась в Базель из Голландии семья Бернулли: уникальное созвездие научных талантов во главе с братьями Якобом и Иоганном. По воле случая юный Эйлер попал в эту компанию и вскоре сделался достойным членом базельского "питомника гениев". Братья Бернулли увлеклись математикой, прочтя статьи Лейбница об исчислении производных и интегралов. Вскоре вокруг братьев сложился яркий математический кружок, и на полвека Базель стал третьим по важности научным центром Европы - после Парижа и Лондона, где уже процветали академии наук. Каждый год на кружке решались новые трудные и красивые задачи, а на смену им вставали новые увлекательные проблемы.

Но когда ученые орлята подросли, выяснилось, что в Швейцарии не хватит места для их гнезд. Зато в далекой России, по замыслу Петра 1 и по проекту Лейбница, была учреждена в 1725 году Петербургская Академия Наук. Русских ученых не хватало, и тройка друзей: Леонард Эйлер с братьями Даниилом и Николаем Бернулли (сыновьями Иоганна) - отправилась туда, в поисках счастья и научных подвигов. Чем только не пришлось заниматься Эйлеру на новом месте! Он обрабатывал данные всероссийской переписи населения. Эту огромную работу Эйлер вел в одиночку, быстро проделывая все вычисления в уме: ведь компьютеров еще не было. Он расшифровывал дипломатические депеши, перехваченные русской контрразведкой. Оказалось, что эту работу математики выполняют быстрее и надежнее прочих специалистов. Он обучал молодых моряков высшей математике и астрономии, а также основам кораблестроения и управления парусным судном в штиль или в бурю. И еще составлял таблицы для артиллерийской стрельбы и таблицы движения Луны. Ведь в дальнем плавании Луна часто заменяла часы при определении долготы! Только гений мог, выполняя всю эту работу, не забыть о большой науке. Эйлер оказался гением. За 15 лет своего первого пребывания в России он

успел написать первый в мире учебник теоретической механики (не учить же простого студента по сложным книгам Ньютона!), а также курс математической навигации и многие другие труды. Писал Эйлер легко и быстро, простым и понятным языком. Столь же быстро он выучивал новые языки, но вкуса к литературе не имел. Математика поглощала все его время и силы.

В 26 лет Эйлер был избран российским академиком, но через 8 лет он переехал из Петербурга в Берлин. В чем дело? Да, тогдашнее российское правительство было малограмотным и свирепым. Только что завершилось правление Анны Иоанновны, и возобновилась чехарда военных переворотов. Однако Эйлера это напрямую не касалось: считаться "немцем" в Петербурге было безопасно и престижно, а ученые немцы были на вес золота. Но Эйлер уже почувствовал себя одним из сильнейших математиков Европы - и вдруг заметил, что ему не с кем на равных поговорить о своей науке. Приезжая иностранная молодежь повзрослела и либо уехала из дикой и опасной России, либо погрязла в мелкой текущей работе. А первое поколение ученых россиян еще не выросло. Вспомним, что Ломоносова тогда послали на учебу в Германию! Эйлер решил переехать туда, где накал ученых дискуссий был повыше. Он выбрал Берлин, где молодой король Фридрих 2 Прусский решил создать научный центр не слабее парижского. Эйлер провел в Берлине четверть века, и считал эти годы лучшими в своей жизни. В Берлине Эйлер занимался всей математикой сразу, и почти все у него получалось. Например, захотелось ему перенести все методы математического анализа на функции, зависящие от комплексных чисел - и создал он теорию функций комплексного переменного. Попутно Эйлер выяснил, что показательная функция и синусоида суть две стороны одной медали. Аналогично было с Большой Теоремой Ферма. Услыхав о ней, Эйлер решил сам придумать утраченное доказательство - и вскоре обнаружил "метод спуска", найденный Ферма веком раньше. Проверив этот метод для степеней 3 и 4, Эйлер стал проверять его для следующего простого показателя - 5. Тут обнаружились неожиданные затруднения, и Эйлер оставил эту тему молодым исследователям. Но только в конце 20 века эта проблема, кажется, приблизилась к окончательному решению.

В геометрии Эйлер также оставил значительный след. Он искал в ней не столько новые изящные факты, сколько общие теоремы, не укладывающиеся в догматику Евклида. Например, теорема о связи между числами вершин, ребер и граней выпуклого многогранника. Эту формулу знал еще Декарт; но он не оставил ее доказательства. В Берлине "король математиков" Леонард Эйлер работал с 1741 по 1766 год; потом он покинул Берлин и вернулся в Россию. Надвигалась старость, выросла огромная семья, а новая российская царица Екатерина 2 (немка по происхождению) предложила Эйлеру гораздо лучшие условия жизни, чем предоставлял своим академикам скуповатый и капризный Фридрих 2. Тесное общение с научной молодежью Эйлера уже не увлекало; он торопился успеть изложить на бумаге те бесчисленные открытия и догадки, которые осенили его в золотую берлинскую пору. Все научные журналы Европы охотно печатали новые статьи Эйлера. Его трудоспособность и вдохновение с годами нарастали, и многие тексты увидели свет лишь после смерти автора. Переезд Эйлера в Петербург мало что изменил для математиков Европы. Великое светило лишь сместилось на восток, не исчезая с горизонта. Удивительно другое: слава Эйлера не закатилась и после того, как ученого поразила слепота (вскоре после переезда в Петербург). Неукротимый старец продолжал размышлять о математике и диктовать очередные статьи или книги до самой смерти. Она настигла его на 77 году жизни и на 16 году слепоты... В 1770-е годы вокруг Эйлера выросла Петербургская математическая школа, более чем наполовину состоявшая из русских ученых. Тогда же завершилась публикация главной его книги - "Основ дифференциального и интегрального исчисления", по которой учились все европейские математики с 1755 по 1830 год. Она выгодно отличается от "Начал" Евклида и от

"Принципов" Ньютона. Возведя стройное здание математического анализа от самого фундамента, Эйлер не убрал те леса и лестницы, по которым он сам карабкался к своим открытиям. Многие красивые догадки и начальные идеи доказательств сохранены в тексте, несмотря на содержащиеся в них ошибки - в поучение всем наследникам эйлеровой мысли. Первый учебник, предназначенный не для последователей, а для исследователей: таково завещание Эйлера и всей эпохи Просвещения, адресованное грядущим векам и народам.

Эйлер Леонард (Euler Leonhard), род. 4.4.1707, Базель — ум. 7(18).9.1783, Петербург.

Математик, механик и физик. Родился в семье небогатого пастора Пауля Эйлера. Образование получил сначала у отца (который в молодости занимался математикой под руководством Я.Бернулли), затем поступил (осенью 1720) в Базельский университет, где в 1724 произнёс речь, посвященную сравнению философии Р.Декарта и И.Ньютона, и был удостоен степени магистра искусств. С конца 1723 Эйлера по настоянию отца стал изучать богословие, но вскоре целиком отдался изучению любимой им математики. В Базельском университете Эйлер слушал лекции по математике И.Бернулли, но особенное значение имели беседы, проводимые с ним И.Бернулли по субботам в течение нескольких лет. В 1726—27 Эйлер выступил в журнале «Acta eruditorum» с первыми научными работами, посвященными актуальным задачам об изохроне в сопротивляющейся среде и о траекториях. Тогда же он принял участие в конкурсе работ на тему о наилучшем расположении мачт на корабле; сочинение Эйлера было опубликовано в 1728.

В 1725 два друга Эйлера, сыновья его учителя — Даниил и Николай Бернулли, не найдя применения своим силам в Базеле, приняли приглашение только что организованной Академии наук в Петербурге. По словам Эйлера, он «преисполнился невыразимым желанием поехать вместе с ними» тогда же. В конце 1726 по рекомендации братьев Бернулли его пригласили на одно из свободных мест в Петербургской АН. Он оставил Швейцарию и в мае 1727 приехал в Петербург.

В Петербурге (где Эйлер жил в 1727—41 и с 1766 до конца жизни) он нашёл весьма благоприятные условия для научной деятельности: материальное обеспечение, широкую возможность публикации трудов, круг учёных с общими интересами в лице Д.Бернулли, Х.Гольдбаха, Я.Германа и др. Эйлер сразу приступил к занятиям математикой и механикой. Его статьи на латинском языке появлялись в органе академии — «Commentarii Academiae imp. scientiarum Petropolitanae» начиная со 2-го тома за 1727 (1729) и публиковались в этом журнале (несколько раз менявшем своё название) без перерыва до самой его смерти и ещё десятилетия спустя. За 14 лет первого петербургского периода жизни Эйлер подготовил к печати около 80 трудов и опубликовал свыше 50; впоследствии его научная продукция значительно выросла. Значение своей работы в русской академии для себя лично Эйлер оценил в письме к руководителю академической канцелярией И.Д.Шумахеру от 18 ноября 1749 следующим образом: «Что собственно до меня касается, то при отсутствии такого превосходного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых, по всем признакам, мог бы заниматься только крохоборством. Когда его королевское величество (Фридрих II Прусский.— Ред.) недавно меня спросил, где я изучал то, что знаю, я, согласно истине, ответил, что всем обязан своему пребыванию в Петербургской Академии».

Эйлер участвовал во многих направлениях деятельности академии. Он читал лекции студентам академического университета, написал общедоступное «Руководство к арифметике» (нем. изд. 1738—40, рус. пер., 2 ч., 1740, 2 изд., 1760), участвовал в различных технических экспертизах. Многие годы он успешно работал над составлением

карт России. По специальному поручению академии Эйлер подготовил к печати «Морскую науку» (2 ч., 1749) — фундаментальный труд по теории кораблестроения и кораблевождения. Позднее на основе этой книги он написал для учащихся морских школ сокращённое руководство на французском языке (1773), русский перевод которого опубликовал (1778) его ученик М.Е.Головин.

В Петербурге Эйлер изучил русский язык. В 1733 он женился на Е.Гзелль — дочери академического живописца. В Петербурге же родились два его сына: математик, физик и астроном Иоганн Альбрехт (1734 — 1800) и врач Карл (1740—90). Третий сын Кристоф {1743—1808), участник астрономической экспедиций академии 1769, служа в армии, достиг чина генерал-лейтенанта и был директором оружейного завода в Сестрорецке.

Тревожное и неустойчивое положение в период регентства Анны Леопольдовны заставило Эйлера принять в 1741 предложение прусского короля Фридриха II переехать в Берлин, где предстояла реорганизация почти бездействовавшего Общества наук в большую новую академию. В Берлинской АН Эйлер занял пост директора класса математики и члена правления, а после смерти её первого президента П.Мопертюи несколько лет (с 1759) фактически руководил академией, вникая во все детали её деятельности, вплоть до хозяйственных и финансовых дел. За 25 лет жизни в Берлине он полностью или черне подготовил около 300 работ, среди них ряд больших монографий. В 40-50-е гг. он участвовал в нескольких научных и философских дискуссиях. С позиций картезианского механического материализма, который сочетался у него с глубокой личной религиозностью, Эйлер выступал против учения о монадах и предустановленной гармонии Г.Лейбница и Х.Вольфа. С Ж.Д'Аламбером он вёл спор о свойствах логарифмов отрицательных и мнимых чисел, с Ж.Д'Аламбером и Д.Бернулли — о природе решений дифференциального уравнения колеблющейся струны. Этот спор, в котором приняли участие и другие крупнейшие математики 2-й пол. 18 в., имел большое значение в развитии математической физики, учения о тригонометрических рядах и в обобщении понятия функции.

Эйлер продолжал заниматься и чисто прикладными задачами. Так, он перевёл с английского на немецкий язык «Новые принципы артиллерии» Б.Робинса (1745) и в обширных дополнениях к этой книге и одном мемуаре (1753) существенно развил учение о движении круглого снаряда в воздухе. Эйлер консультировал работы по проведению канала между Хавелем и Одером, по водоснабжению дворца Сан-Суси, по организации лотерей. Изучая действие сегнерова колеса, он заложил основы теории турбин. Он внёс ценный вклад в оптическую технику, теоретически установив, что путём соединения двух линз различной преломляемости можно избежать хроматической аберрации, мешавшей дальнейшему усилению телескопов-рефракторов; первый ахроматический объектив по принципу Эйлера построил в 1758 Дж. Доллонд. Эйлер существенно усовершенствовал также волшебный фонарь. Он занимался и вопросами практической механики, изыскивая целесообразную форму зубцов зубчатых передач, изучал устройство ветряных мельниц и т.д. Ценный вклад внёс Эйлер и в учение о сопротивлении материалов, где его имя, например, носит известная формула для критической нагрузки колонн.

Живя в Берлине, Эйлер не переставал интенсивно работать для Петербургской АН, сохраняя звание её почётного члена и получая пенсию. Он вёл с Петербургом обширную научную и научно-организационную переписку, в частности переписывался с М.В.Ломоносовым, которого высоко ценил. Эйлер редактировал математический отдел русского академического научного органа, где опубликовал за это время почти столько же статей, сколько в «Мемуарах» Берлинской АН. Он деятельно участвовал в подготовке русских математиков; в Берлин командировались для занятий под его руководством

будущие академики С.К.Котельников, С.Я.Румовский и М.Софронов. Большую помощь Эйлер оказывал Петербургской АН, приобретая для неё научную литературу и оборудование, ведя переговоры с кандидатами на должности в академии и т. д.

В бытность Эйлера в Берлине несколько раз вставал вопрос о его возвращении в Россию. Трения Эйлера с королём Фридрихом II, связанные с расхождениями в деловых вопросах работы академии, но более всего с глубоким антагонизмом во многих взглядах и вкусах короля и учёного, постепенно привели к разрыву между ними. Король долго не отпускал учёного с мировым именем, но Эйлер настоял на своём и 17(28) июля 1766 вместе с семьёй вернулся в Петербург.

Несмотря на преклонный возраст и постигшую его почти полную слепоту (правый глаз Эйлер потерял в 1738, а левым почти не видел с осени 1766), работоспособность его не снизилась. Благодаря сохранившейся силе ума и феноменальной памяти, а также помощи способных молодых секретарей, его учеников — И.А.Эйлера, В.Л.Крафта, А.И.Лекселя, Н.И.Фусса, М.Е.Головина, Эйлер смог до конца жизни по-прежнему продуктивно работать. За 17 лет вторичного пребывания в Петербурге им было подготовлено около 400 работ, среди них несколько больших книг. За один 1777 он вместе с Н.И.Фуссом подготовил почти 100 статей. Эйлер продолжал участвовать и в организационной работе в академии. В 1776 он был одним из экспертов проекта одноарочного моста через Неву, предложенного И.П.Кулибиным, и из всей комиссии один оказал широкую поддержку выдающемуся русскому изобретателю.

Заслуги Эйлера как крупнейшего учёного и организатора научных исследований получили высокую оценку ещё при его жизни. Помимо Петербургской и Берлинской академий, он состоял членом крупнейших научных обществ: Парижской АН, Лондонского королевского общества и т. д. В различных научных конкурсах работы Эйлера неоднократно удостоивались премий.

Эйлер скончался в Петербурге от кровоизлияния в мозг и был похоронен на Смоленском кладбище. В 1837 Петербургская АН воздвигла на его могиле памятник; в 1956 его прах был перенесён в Ленинградский некрополь. Одной из отличительных сторон творчества Эйлера является его исключительная продуктивность. Только при жизни Эйлера было опубликовано около 550 его книг и статей (список трудов Эйлера содержит примерно 850 названий). В 1909 Швейцарское естествонаучное общество приступило к изданию полного собрания сочинений Эйлера в трёх сериях: математической, механико-астрономической и физической. К настоящему времени из печати вышло 67 томов и готовится ещё 5. Большой интерес представляет и колоссальная научная переписка Эйлера (около 3000 писем), до сих пор опубликованная только частично. С 1975 начато в рамках Собрания сочинений Эйлера полное издание его научной переписки, которое составит четвёртую серию, пока что изданы 3 тома из 8 намеченных, впрочем часть научных писем опубликована ранее в других изданиях.

Необыкновенно широк был круг занятий Эйлера, охватывавших все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию музыки, теорию машин, баллистику, морскую науку, страховое дело и т. д. Около 3/5 работ Эйлера относится к математике, остальные 2/5 преимущественно к её приложениям. В этом соотношении нашла выражение тесная связь математических исследований Эйлера с практикой. Математику он разрабатывал в значительной части как аппарат естествознания, особенно механики и техники. Но Эйлер прежде всего был математиком. Часто черпая задачи из практики, он развивал математику не от случая к случаю, но как органичное целое, части которого находятся в тесной и глубокой взаимосвязи. Свои

результаты и результаты, полученные другими, Эйлер систематизировал в ряде классических монографий, написанных с поразительной ясностью и снабжённых ценными примерами. Таковы, например, «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически» (2 тт., 1736), «Введение в анализ бесконечных» (2 тт., 1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), «Теория движения твёрдого тела» (1765), «Универсальная арифметика» (2 тт., 1768—69), выдержавшая около 30 изданий на 6 языках, «Интегральное исчисление» (3 тт., 1768—70, 4-й т., 1794) и др. Особенностью этих руководств является постоянная забота Эйлера раскрыть пути, ведущие к излагаемым результатам; благодаря этому многие книги Эйлера и сейчас интересны не только для специалистов, но и для учащейся молодёжи. В 18в., а отчасти и в 19в. огромную популярность приобрели общедоступные «Письма о разных физических и философических материях, писанных к некоторой немецкой принцессе...» (3 чч., 1768—74), которые выдержали свыше 40 изданий на 10 языках. Большая часть содержания монографий Эйлера вошла затем в учебные руководства для высшей и отчасти для средней школы. Невозможно перечислить все донныне употребительные теоремы и методы Эйлера, из которых только немногие фигурируют в литературе под его именем.

В «Механике» Эйлер впервые изложил в широком объёме динамику точки при помощи нового математического анализа. В первом томе этого сочинения рассмотрено свободное движение точки под действием различных сил как в пустоте, так и в сопротивляющейся среде; во втором томе — движение точки по данной линии или по данной поверхности. При этом Эйлер не только упростил приёмы решения уже известных проблем, но и решил многие новые задачи, открыл пути к дальнейшим исследованиям. В частности, большое значение для развития небесной механики имела глава о движении точки под действием центральных сил. В 1744 он впервые корректно сформулировал механический принцип наименьшего действия и показал его первые применения. В «Теории движения твёрдых тел» Эйлер разработал кинематику и динамику твёрдого тела и дал уравнение его вращения вокруг неподвижной точки, положив начало теории гироскопов. В своей теории корабля Эйлер внёс ценный вклад в теорию устойчивости. Всё это подготовило почву для создания системы аналитической механики Лагранжа. Велики были открытия Эйлера и в небесной механике. Соревнуясь с А.Клеро, он значительно продвинул теорию движения Луны. Метод, изложенный в первой монографии Эйлера по этому вопросу (1753), был использован Т.Майером для вычисления лунных таблиц, долгое время служивших для определения долготы в открытом море; высокие достоинства предложенного Эйлером другого метода определения лунной орбиты (1772) получили должную оценку лишь в конце 19в. Мемуары 1757—71 внесли большой вклад в механику сплошных сред (основные уравнения движения идеальной жидкости в форме Эйлера и в т. н. переменных Лагранжа, колебания газа в трубах и пр.). Обширный цикл работ, начатый в 1748, Эйлер посвятил математической физике: задачам о колебании струн, пластинок, мембраны и др. Все эти исследования стимулировали развитие теории дифференциальных уравнений, приближённых методов анализа, специальных функций, дифференциальной геометрии и т.д. Многие чисто математические открытия Эйлера содержатся именно в этих его работах.

Главным делом Эйлера как математика явилась разработка математического анализа, самые рамки которого он значительно расширил по сравнению со своими предшественниками. Он заложил основы нескольких математических дисциплин, которые только в зачаточном виде имелись или вовсе отсутствовали в исчислении бесконечных малых И.Ньютона, Г.Лейбница и Я. и И.Бернулли. Так, Эйлер первый систематически ввёл в рассмотрение функции комплексного аргумента («Введение в анализ бесконечных», т. 1) и исследовал свойства основных элементарных функций комплексного переменного (показательная, логарифмическая и тригонометрические

функции). В частности, он вывел формулы, связывающие тригонометрические функции с показательной (формулы Эйлера), следует заметить, что эта связь была ранее упомянута без доказательства в одной работе Р.Котеса. Работы Эйлера в этом направлении, выяснение им некоторых свойств аналитических функций (уравнения Д'Аламбера — Эйлера, связь с конформными отображениями) и, наконец, применение мнимых величин к вычислению интегралов положили начало теории функций комплексного переменного.

Эйлер явился создателем вариационного исчисления, изложенного в работе «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума, либо минимума...» (1744). Несколько позднее Ж.Лагранж существенно переработал и усовершенствовал метод Эйлера, ввёл понятие и знак вариации. После чего Эйлер оригинально изложил вариационное исчисление в ряде статей и «Интегральном исчислении». Метод, с помощью которого Эйлер в 1744 вывел необходимое условие экстремума функционала (уравнение Эйлера), явился прообразом прямых методов вариационного исчисления 20 в.; позднее Эйлер ввёл в рассмотрение поле экстремалей.

Систематически развивая новые приёмы интегрирования дифференциальных уравнений, введя ряд основных понятий в этой области, Эйлер создал как самостоятельную дисциплину теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и заложил основы теории уравнений с частными производными. Здесь ему принадлежит огромное число открытий: классический общий способ решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, метод вариации произвольных постоянных, выяснение основных свойств уравнения Риккати, интегрирование линейных уравнений с переменными коэффициентами (в частности, т.н. уравнения Бесселя) с помощью бесконечных рядов, критерии особых решений, учение об интегрирующем множителе, различные приближённые методы и ряд приёмов решения уравнений с частными производными. Значительную часть этих результатов Эйлер собрал в своём «Интегральном исчислении».

Эйлер обогатил также дифференциальное и интегральное исчисление в узком смысле слова. Достаточно назвать широкое развитие учения о замене переменных, теорему об однородных функциях, подстановки Эйлера, понятие двойного интеграла (известное также Ж.Лагранжу) и вычисление многих специальных интегралов (т.н. эйлеровы интегралы). В теорию рядов Эйлер внёс новые идеи, которые показывают, что он умел видеть на многие десятилетия вперёд. Примером может служить его трактовка проблемы сходимости рядов. В «Дифференциальном исчислении» Эйлер высказал и подкрепил примерами убеждение в целесообразности применения расходящихся рядов и предложил методы обобщённого суммирования рядов. При тогдашнем состоянии науки он не мог выяснить и даже вполне конкретно поставить вопрос об условиях, в которых законны его определения и методы; он не знал также всей важности построения теории сходимости рядов. Тем не менее в своих воззрениях и в методах суммирования он предвосхищал идеи современной строгой теории расходящихся рядов, созданной на рубеже 19 и 20 вв. Кроме того, Эйлер получил в теории рядов множество конкретных результатов. Он открыл т.н. формулу суммирования Эйлера — Маклорена, предложил преобразование рядов, носящее его имя, определил суммы громадного количества рядов, ввёл в математику новые важные типы рядов (например, тригонометрические ряды, т. н. ряды Ламберта). Сюда же примыкают исследования Эйлера по теории непрерывных дробей и других бесконечных процессов.

Эйлер является основоположником теории специальных функций. Он первым начал рассматривать синус и косинус как функции, а не как отрезки в круге. Им получены почти все классические разложения элементарных функций в бесконечные ряды и произведения. В его трудах создана теория гамма-функции. Он исследовал свойства эллиптических

интегралов, гиперболических и цилиндрических функций, дзета-функции, некоторых тэта-функций, интегрального логарифма и важных классов специальных многочленов.

По замечанию П.Л.Чебышева, Эйлер положил начало всем изысканиям, составляющим общую часть теории чисел, к которой относится свыше 100 мемуаров Эйлера. Так, Эйлер доказал ряд утверждений, высказанных П.Ферма, разработал основы теории степенных вычетов и теории квадратичных форм, обнаружил (но не доказал) квадратичный закон взаимности и исследовал ряд задач диофантова анализа. В работах о разбиении чисел на слагаемые и по теории простых чисел Эйлер впервые использовал методы анализа, явившись тем самым создателем аналитической теории чисел. В частности, он ввёл знаменитую дзета-функцию и доказал т.н. тождество Эйлера, связывающее простые числа со всеми натуральными.

Велики заслуги Эйлера и в других областях математики. В алгебре ему принадлежат работы о решении в радикалах уравнений высших степеней и об уравнениях с двумя неизвестными, а также т. н. тождество Эйлера о четырёх квадратах. Эйлер значительно продвинул аналитическую геометрию, особенно учение о поверхностях 2-го порядка. В дифференциальной геометрии он детально исследовал свойства геодезических линий, впервые применил натуральные уравнения кривых, а главное, заложил основы теории поверхностей. Он ввёл понятие главных направлений в точке поверхности, доказал их ортогональность, вывел формулу для кривизны любого нормального сечения, начал изучение развёртывающихся поверхностей и т. д.; в одной посмертно опубликованной работе (1862) он частично предварил исследования К.Гаусса по внутренней геометрии поверхностей. Эйлер занимался и отдельными вопросами топологии и, например, доказал важную теорему о выпуклых многогранниках (встречающуюся в рукописях Р.Декарта без доказательства).

Эйлера-математика нередко характеризуют как гениального «вычислителя». Действительно, он был непревзойдённым мастером формальных выкладок и преобразований, в его трудах многие математические формулы и символика впервые получают современный вид (например, ему принадлежат обозначения для e и p). Однако Эйлер был не только исключительной силы «вычислителем». Он внёс в науку ряд глубоких идей. Даже в тех вопросах, где он, как и другие математики 18 в., стоял на шаткой почве, его рассуждения, как правило, могут быть строго обоснованы и служат образцом глубины проникновения в предмет исследования.

По выражению П.Лапласа, Эйлер явился общим учителем математиков 2-й пол. 18 в.